

In unserer Volksschule ist das Bestreben nach gutem Unterricht ein wichtiger Faktor für Innovationen. Dies gilt insbesondere für den «Mathematikunterricht» als ein zentrales Fach. Dabei soll Mathematik nach gängiger Theorie und Praxis die mathematische Bildung mit längerfristigen Prozessen, sowie entdecken, beschreiben und begründen fördern. Weiter gilt das Augenmerk auf Rechenschwierigkeiten und Sprachbildung. Die Heterogenität begegnet uns beim individuellen und gemeinsamen Lernen. Gute Aufgaben bilden dabei die Basis für herausfordernde Lernangebote und dann ist da noch die Leistungsfeststellung mit dem Wahrnehmen der Lernstände, dem Beurteilen und dem Rückmelden. Eine Herkulesaufgabe! In der Tat, doch sie macht auch Spass.

Dr. Patrick Meier

### «Guter Mathematikunterricht»



Abb. 1 Unterricht Zyklus 1, Bild Patrick Meier

Bei einer Umfrage (2020) nach gutem Mathematikunterricht am Seminar Unterstrass wurden Studentinnen und Studenten nach gutem Mathematikunterricht befragt. Genannt wurden Themen wie «Interesse wecken», «abwechslungsreich», «flexibel auf Probleme eingehen», «humorvolles, zielgerichtetes Klassenklima», «Individualisierung», «angemessene Übungsphase», «klare Darstellungen (WT, PP)», «strukturierter Ablauf» und «Pünktlichkeit».

Einzelne Themen lassen sich selbstredend auf alle Fächer abbilden, doch zeigte sich deutlich, dass die Studentinnen und Studenten das Thema «Interesse wecken» hoch gewichteten.

### Bedeutung und Zielsetzung von Mathematik

Im Lehrplan 21 ([www.lehrplan.ch](http://www.lehrplan.ch)) wird Mathematik als Werkzeug, welches die Umwelt erschliesst, beschrieben und das Verständnis dafür weckt: «Die Beschäftigung mit Mathematik unterstützt die Entwicklung von Abstraktionsfähigkeit, Vorstellungsvermögen, Problemlösekompetenz und rationalem Denken». Fokus-

siert werden dabei der Umgang mit neuen Herausforderungen, die Darstellung von Sachverhalten und eigenen Gedankengängen. Da sich die Kompetenzbereiche im Fach «Mathematik» im Mindesten bei «Zahl und Variable» und «Form und Raum» auch gegenüber früheren Lehrplänen nur unwesentlich verändert haben, liegt die inhaltliche «Revolution» bei «Grössen, Funktionen, Daten und Zufall». Explizit weisen die Lehrplangestalter darauf hin, dass sich die mathematische Kompetenz dann zeigt, wenn mathematisches Wissen in konkreten Situationen angewendet wird oder mit im Zusammenspiel von mathematischen Inhalten und Tätigkeiten zum Ausdruck gebracht wird. Die neu bezeichneten Handlungsaspekte wie «operieren und benennen», «erforschen und argumentieren» sowie «mathematisieren und darstellen» sind gleichwertig. Feststellbar ist im Schulalltag jedoch eine Priorisierung von «operieren und benennen» wie auch «mathematisieren und darstellen». Unsicherheiten zeigen sich bei «erforschen und argumentieren».

Weiter weist der Lehrplan 21 beim Zyklus 1 darauf hin, dass sich Kinder ab dem 4. Altersjahr fürs Zählen, für Zahlen und Formen interessieren: «Ein entwicklungs- und kompetenzorientierter Unterricht nimmt solche Motive auf und öffnet Zugänge zu weiteren Einsichten». Der didaktische Weg führt damit zum spielerischen Erforschen, Primärerfahrungen, das Entdecken und Darstellen mathematischer Beziehungen, die Annäherung an mathematische Logik, die Erweiterung mathematischer Strategien und das Gespräch darüber.

### Wissenschaftliche Erkenntnisse zu «gutem, effektivem Mathematikunterricht

Die ASDEMA Studien 2015 bis 2017<sup>1</sup> zeigten auf, dass die Knaben in «Mathematik» besser sind und die «Mädchen» in Deutsch. Somit bestätigten sie Trends und Aussagen anderer large scale assessments. Vergleicht man jedoch die Resultate, während der ganze Studiedauer 2015 bis 2022 zeigen sich erstaunliche Resultate auf Grund von Mehrstunden. In der zweiten Klasse während der ganzen Studiedauer gelten diese Aussagen nach wie vor. Am Ende der sechsten Klassen gleichen sich die Leistungen der Geschlechter bis zur Parität vollumfänglich in «Mathematik» an. So liegt die Differenz zwischen 0 und 4 Punkten, was einer nicht signifikanten Differenz bei einem Mittelwert von 632 Punkten entspricht.

Die QUASUM-Studie (2000)<sup>2</sup> verband die Fachleistungen Mathematik der 5. Klasse mittels Pfadanalyse mit Einflussfaktoren von Mathematikunterricht. Erkannt wurde, dass das Selbstvertrauen bei den Geschlechtern unterschiedlich ist und Mädchen sich weniger zutrauen. Das Selbstvertrauen wirkt auch ( $p=.44$ ) auf das mathematische Fachinteresse, welches wiederum ( $p=.22$ ) auf die den erreichten Lernstand wirkt. Weiter wird erkannt, dass das Anspruchsniveau des Unterrichts starken Einfluss hat ( $p=.22$ ).

In der TALIS Videostudie (2016 – 2019) wurde in Deutschland wurde nach Aussagen zu Wirkungen im Mathematikunterricht wie Lernprozesse und Lernergebnisse gesucht. Erkannt wurde, dass eine erfolgreiche Klassenführung (1) mit klarer Strukturierung des Lernstoffes (2), eindeutigen Regeln und Ritualen (3) der (mathematischen) Unterrichtsqualität am meisten dient.

**«Kinder lernen nicht durch Zuhören, sondern dadurch, dass sie etwas tun und die Aufgaben selbständig lösen». Hattie (2007)**

Fazit:

- Genderspezifische Unterschiede in Mathematik können (stark) minimiert werden.
- Mathematikunterricht wirkt.

- Der Lehrperson (siehe auch Hattie, 2007) kommt mit ihrem Anspruch an das Niveau des Unterrichts eine zentrale Rolle bei der mathematischen Förderung zu (Motivation, Fachinteresse, Selbstvertrauen, ...)
- Allgemein kognitive Voraussetzungen der Lernenden spielen eine wichtige Rolle bei «mathematischem Erfolg».

#### **Didaktik zum «Guten Mathematikunterricht»**

Nicht umsonst gilt in der Pädagogik der Leitsatz «Wo sich Lernende und Lehrpersonen wohl fühlen, lässt sich einfacher lernen». Konkret bedeutet dies:

- Lernförderliches Klima ermöglichen
- Herausfordernde Aufgaben stellen und fachlich korrekt anleiten
- Vielseitige Lernarrangements planen und umsetzen
- Individuelle und gemeinsame Erfolgserlebnisse ermöglichen
- Zeitnahe, zielorientierte und konstruktive Rückmeldungen geben
- Erfolg macht hungrig

Die Didaktik zum Mathematikunterricht hilft dazu, indem mit dem EIS(S) Prinzip gearbeitet wird:

E naktiv	}	Bruner (1970)
I konisch		
S ymbolisch		

(S) prache                      Ruf/Gallin (1998)

Das EIS-Prinzip kann sowohl als Prinzip der Unterrichtsgestaltung eingesetzt werden, wie auch als «Erklärprinzip». Wird seitens der Lernenden etwas nicht verstanden so kann mit dem umgekehrten Ablauf von symbolisch zu ikonisch hin zu enaktiv ein breitbandiges Erklärschema eingesetzt werden.

Es soll weiter beachtet werden, dass Mathematik selbst eine Sprache darstellt und der Austausch via Sprache bspw. In Mathe-Konferenzen (vgl. dazu PIKAS) bei Themen in Operationen in Zahl und Variable und dem Schema «*wie rechnest du, wie rechne ich, wie rechnen wir*»

<sup>1</sup> ASDEMA bedeutet Auswirkungen Studentenfelerhöhung Deutsch und Mathematik. Getestet wurden in den Jahren 2015 bis 2022 rund 8000 Lernende der zweiten, vierten und sechsten Klasse des Kantons Nidwalden.

<sup>2</sup> QUASUM (2000) steht für Qualitätsuntersuchung im Unterricht Mathematik). Die Untersuchungen fanden an den 5. und 9. Klassen von Brandenburg statt.

ergeben sich sehr spannende Lektionen mit einem gegenseitigen Austausch. Wir dieses Setting noch angereichert mit «rechne geschickt» sind die Diskussionen auch für Lehrpersonen immer wieder spannend.

### Spiralprinzip in Mathematiklehrmitteln

Durch das Spiralprinzip in allen Mathematiklehrmitteln ist es nicht tragisch, wenn Lernende zu einem bestimmten Zeitpunkt Inhalte noch nicht ganz verstanden haben. Diese Inhalte werden wieder aufgenommen und kommen in anderen Formen und Methoden wieder in den Unterricht.

Erfahrene Lehrpersonen haben diese Gelassenheit, jüngere Lehrpersonen sind daran, diese zu erwerben.

### Auswahl an «guten Aufgaben»

Nur weil Mathematikaufgaben im Mathematiklehrmittel zur Verfügung gestellt werden, sind es noch lange nicht gute Aufgaben. Es geht auch darum, unter welchen Bedingungen diese Aufgaben eingesetzt werden. Fachdidaktisch geklärt sind «gute Aufgaben» mathematisch ergiebig, fordern zur Eigenproduktion heraus, bieten Möglichkeiten zur Selbstdifferenzierung und eröffnen individuelle Herangehensweisen und Lösungstiefen. So kann das Lösen einer einfachen Rechnung aus Zahl und Variable wie « $20 * 16$ » zu spannenden Lösungen mittels einer Mathekonferenz führen. Wie rechnest Du? Wie rechne ich? Wie rechnen wir geschickt?

### Einsatz von offenen Aufgaben (siehe auch mathematischer Orientierungslauf, Meier, 2018)

Offene Aufgaben werden sehr unterschiedlich definiert und nach Klarheit von Anfangs- und Zielzustand und Mehrdeutigkeit der Transformation eingeteilt (vgl. Greefrath, 2010). Für den mathematischen Orientierungslauf (mathOL) können Schätz- und Fermiaufgaben eingesetzt werden. Erstere werden zur Ermittlung von Näherungswerten verwendet, „Fermiaufgaben sind unterbestimmte, offene Aufgaben mit klarem Endzustand aber unklarem Anfangszustand sowie unklarer Transformation – bei denen die Datenbeschaffung –meist mehrfaches Schätzen – im Vordergrund steht“. (Greefrath, 2010, S. 81)

### Aus der Praxis für die Praxis – Ideen für die Unterrichtsgestaltung:

A) **Mathematischer Unterrichtseinstieg** (mathematische Aktivierung): Mit einem guten Einstieg in den (jeden) Unterricht wird gezielt die Aufmerksamkeit der Kinder und Jugendlichen gesucht. Die Lernenden selbst können im Ritual dieses Prozesses Aufgaben mitbringen. Das entlastet die Lehrpersonen. Alle Aufgaben eines mathematischen Unterrichtseinstieges lassen sich problemlos wie angesprochen als Einstiegsaufgaben, als Zwischenaufgabe in einer Lektion, als Hausaufgabe oder sogar als Wochenaufgabe einsetzen. Bei vielen mathematischen Herausforderungen machen ganze Familien mit und probieren Lösungen zu finden. Eingesetzt werden Logikrätsel, mathematische Zahlenfolgen, magische Quadrate, Sudokus, Zahlenrätsel aus Zeitschriften.

B) **Einsatz eines Forscherheftes**: Sämtliche vorher genannten Aufgaben lassen sich in einem Forscherheft lösen. Dies hilft den Lernenden, sich im «Ritual Forschen» zu vertiefen. Da es sich um Heft für die Lernenden handelt und Kreativität ein wichtiger Teilbereich darstellt, wäre der Anspruch der Lehrenden einzig darauf zu setzen, etwas nachvollziehen zu können.

Eingesetzt ab der 4. Klasse ergeben sich interessante nicht abschliessende Fragestellungen:

- Parkettierung?
- Ausführungen zu Vierecken?
- Wie schwer sind Tiere?
- Hätten alle Kinder unserer Schule im Hallenbad Platz?
- ....

**Forscheraufgaben / «Kann-es-sein-Aufgaben»**: Diese beiden Aufgabenformen bereichern den Unterricht auf eine vielfältige Art und Weise und lassen viele unterschiedliche Gedanken und Diskussionen zu.

#### Zyklus 1:

- Wie viele Äpfel trägt «dieser» Apfelbaum?
- Wie viele Guetzlis passen in diese Box?
- ...

**Zyklus 2:**

- Wie viel wiegt unsere ganze Klasse?
- Wie viele Kilometer lege ich in einem Schuljahr auf meinem Schulweg zurück?
- Wie schwer ist ein Sumoringer?
- Stimmen die Masse des vitruvianischen Menschen<sup>3</sup> auch für Dich?

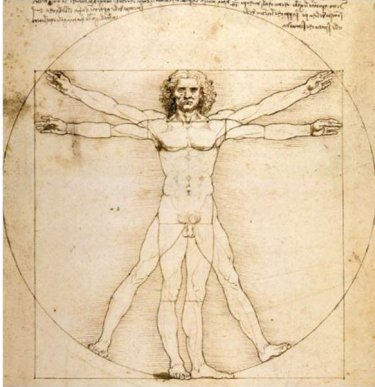


Abb. 2 vitruvianischer Mensch (wikipedia, abgerufen am 18.09.2022)

- C) **Mathematikprojekt:** Nach Krauthausen & Scherer (2007) sollte es sich bei Projekten um realistische Unterrichtssituationen handeln. Typisch sind Merkmale wie «fächerübergreifend», «Beteiligung der Lernenden» und «soziales Handeln». Die Vorteile von projektartigem Arbeiten sind äusserst vielfältig: So werden verschiedene Interessen der Kinder berücksichtigt mit den entsprechenden Stärken und Schwächen der einzelnen Kinder. Projekte können fächerübergreifend durchgeführt werden. Vorgesprochen (vgl. Krauthausen&Scherer, 2007, Seite 97) werden Untersuchungs-, Vergleichs- und Erkundungsaufträge, welche unter dem Fokus der Mathematik selbst erweitert, geändert und ergänzt werden können. Wieso nicht eine Projektwoche zu einem mathematischen Thema durchführen? Mögliche Inhalte dazu:
- «Rechnen im alten Ägypten»; «Rechnen im Altertum»
  - «Geheimschriften und Geheimcodes»
  - eigene Fragebögen entwerfen (z.B. mein Lieblingsfach) und auswerten
  - «von Brücken und Wurfbahnen», sich der Parabel annähern
  - die dritte Dimension, ungewöhnliche Körper untersuchen und bauen (Tetraeder,

Hexaeder, .... (platonische Körper)

- Internetrecherche zum Thema «Briefmarken und Mathematik»

Selbst eine konkrete Fragestellung kann zu unterschiedlichen Aufbereitungen führen. «Wie schwer sind unsere Schultaschen?» als Projektfrage, zieht verschiedene Themen mit grosser Kreativität an:



Abb. 3 aus «mathematik lehren. Ausgabe 149 (2008)

- D) **Computereinsatz:** Untersuchungen zeigen (Meier, 2012), dass der Einsatz eines Computers die Lernenden ganz speziell motiviert. So könnte der Einsatz einer dynamischen Geometriesoftware (DGS) dazu führen, dass die Lernenden zu Hause, die Themen weiterentwickeln. Das Programm «geogebra.org» kann durch die Schulen gratis eingesetzt werden. Vorstellbar wären Aufgaben wie:
- Welche gleichmässigen n-Ecke kannst du mit einer DGS konstruieren? (Anmerkung: Bereits die Konstruktion eines regelmässigen 5-Eck kann eine grosse Herausforderung sein).
  - Wie gelingt mir die Bildung eines Kreises mit einer bestimmten Anzahl Punkten? Was muss ich berücksichtigen?
- E) **Mathematik auch draussen anbieten:** Bei einem «mathOL» geht es um keinen Lauf gegen die Zeit, sondern darum einen bestimmten Weg abzulaufen und verschiedene mathematische Aufgaben zu lösen. Dieser Weg kann individuell oder in Gruppen absolviert werden. Auf [www.rundum-schule.ch](http://www.rundum-schule.ch) befinden sich diverse mathematische Orientierungsläufe aus Luzern (1), Basel (1) Zürich (2), Zug (1) und Schaffhausen

<sup>3</sup> Der vitruvianische Mensch ist eine Zeichnung von Leonardo da Vinci aus dem Jahre 1490.

(1). Eingebaut sind Fragen zu allen Bereichen des Lehrplans 1 wie «Zahl und Variable», «Form und Raum» und «Größen, Funktionen, Daten, Zufall».



Abb. 4. Mathematischer Orientierungslauf Basel. Bild Patrick Meier

**F) Vorlesen im Mathematikunterricht:** Die Bücher «Kleines Mathematikum» von Albrecht Beutelspacher (2010) und der «Zahlentafel» von Magnus Enzensberger eignen sich ab der 4. Klasse bis zur Sekundarstufe I zum Vorlesen. Sie greifen Themen des Mathematikunterrichts aus allen Inhaltsaspekten des Lehrplans 21 wie Zahl und Variable, Form und Raum wie auch Größen, Funktionen, Daten und Zufall auf. Hörbücher beweisen, dass das Vorlesen zeitlos ist und auch bei älteren Lernenden beliebt sein kann.

**MathePläne:** In den vergangenen Jahren etablierte sich eine breite Form der «MathePläne» im Mathematikunterricht der Volksschule. «MathePläne» sind weder gut noch schlecht,

es kommt auf das didaktische Setting an. Auf den ersten Blick wollen «MathePläne» eine Antwort auf den Umgang mit Heterogenität geben. Rückmeldungen von Lernenden lassen jedoch aufhorchen: «In der Mathematik mussten wir immer MathePläne abarbeiten und es galt, möglichst schnell durch die Mathematikaufgaben zu kommen und so keine Hausaufgaben zu erhalten.» «Guter Mathematikunterricht» sieht anders aus. Werden MathePläne pädagogisch sinnvoll in einem thematischen abgegrenzten Kontext gestellt, so ist dies eine Form unter vielen, welche durchaus wertvolle Themen wie «Selbstorganisiertes Lernen (SOL)» und «Individuelles Lernen» abdecken kann. Der Vorstand des Arbeitskreises Schweiz-Liechtenstein der GDM<sup>4</sup> (2012) bringt es auf den Punkt: «Ausschliessliche Planarbeit wird deshalb dem Fach Mathematik nicht gerecht und vernachlässigt den Aufbau und die Förderung zentraler Kompetenzen, die im Zusammenhang mit dem Lehrplan 21 (EDK, 2011) in den Fokus rücken».

### Fazit

«Guter Mathematikunterricht» ...

- ... muss in der Vorbereitung nicht aufwändig sein, sondern kreativ.
- ... wird in meinem Schulzimmer repräsentiert.
- ... berücksichtigt verschiedene Lerntypen.
- ... berücksichtigt das EIS(S) als Unterrichts- und Lehrprinzip.
- ... ist bewegt, rhythmisiert und alters- und entwicklungsgerecht.

### Literaturhinweise

- Flyer: Täglich mehr Bewegung in der Schule, BASPO, 2011, [www.schulebewegt.ch](http://www.schulebewegt.ch)
- Greefrath, G. (2010). Didaktik des Sachrechnens [http://www.rundumschule.ch/unterlagen/mathematik/mt\\_offen.htm](http://www.rundumschule.ch/unterlagen/mathematik/mt_offen.htm)
- Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik, <https://pikas.dzlm.de>

<sup>4</sup> GDM steht für Gesellschaft für Mathematikdidaktik