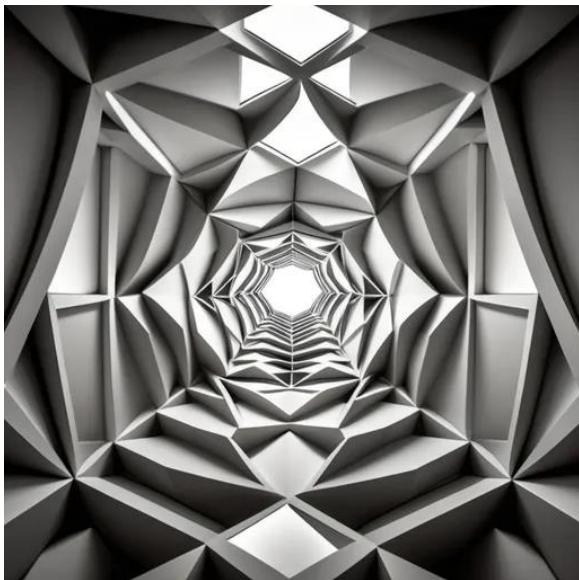


Die **geometrische Perspektive** ist ein zentrales Konzept in Kunst, Architektur und Mathematik, welches die Darstellung räumlicher Tiefe ermöglicht. Ihre Entwicklung reicht von der Antike, wo Euklid die theoretischen Grundlagen legte, bis zur Renaissance, als Künstler wie Brunelleschi und Alberti die Zentralperspektive revolutionierten. Diese Erfindung veränderte das menschliche Raumverständnis und beeinflusste Kunst, Kultur und Philosophie nachhaltig. Im Barock und der Moderne wurde die Perspektive weiter verfeinert und aufgelöst. In der Schule kann die geometrische Perspektive interdisziplinär im Mathematik- und Kunstunterricht eingesetzt werden, um Kompetenzen in *Raum und Form* sowie *Gestalten* zu fördern, wie es der **Lehrplan 21** vorsieht. Dabei werden zentrale mathematische Konzepte wie Projektionen und Transformationen sowie künstlerische Darstellungen dargestellt. Selbstredend können auch analoge (bspw. Reiskbrett) wie auch digitale Tools (bspw. gabri geometre, geogebra uam.) eingesetzt werden.

Dr. Patrick Meier



Der nachfolgende Beitrag zur geometrischen Perspektive gliedert sich in drei Themenpunkte:

- a) geometrische Perspektive aus historischer Sicht
- b) geometrische Perspektive aus mathematischer Sicht
- c) Einsatz der geometrischen Perspektive im Schulalltag mit didaktischen Hinweisen

A) Geometrische Perspektive aus historischer Sicht

Die geometrische Perspektive ist ein zentrales Konzept in Kunst, Architektur und

Mathematik, welches die Darstellung räumlicher Tiefe auf zweidimensionalen Flächen ermöglicht. Historisch gesehen durchlief die Entwicklung der Perspektive mehrere Phasen, die eng mit den Fortschritten in Wissenschaft, Kunst und Philosophie verbunden sind.

Im antiken Griechenland legten Denker wie Euklid mit seiner *Elemente*-Schrift die theoretischen Grundlagen der Geometrie. Euklid beschrieb grundlegende geometrische Prinzipien, die später für die Perspektivlehre entscheidend sein sollten, auch wenn die systematische Anwendung der Perspektive in der griechischen Kunst noch nicht ausgeprägt war. Die Römer erweiterten diese Kenntnisse und wandten sie in ihrer Architektur und Malerei an, wie beispielsweise in den illusionistischen Fresken von Pompeji, die bereits Ansätze von Raumtiefe zeigen.

Die eigentliche Revolution der geometrischen Perspektive fand jedoch in der Renaissance statt. Künstler wie Filippo Brunelleschi und Leon Battista Alberti entwickelten im 15. Jahrhundert ein wissenschaftliches Verständnis der Zentralperspektive. Brunelleschi gilt als derjenige, welcher die Prinzipien der Fluchtpunkte und des Horizontes in die Kunst einführte. Alberti schrieb in seinem Werk *De pictura* eine Anleitung, wie Künstler diese mathematisch korrekte

Perspektive anwenden können, um eine realistische Tiefendarstellung zu erreichen.

Die Erfindung der Perspektive hatte nicht nur künstlerische, sondern auch kulturelle und philosophische Auswirkungen. Sie veränderte das Verständnis der Menschen von Raum und Wirklichkeit. Indem Künstler einen klar definierten Standpunkt für den Betrachter festlegten, spiegelte die Perspektive den wachsenden Individualismus der Renaissance wider. Der Mensch rückte ins Zentrum der Weltwahrnehmung, und die geometrische Perspektive bot ein visuelles Instrument, diese neue Weltsicht zu verkörpern.

Im Barock und darüber hinaus wurde die Perspektive weiter verfeinert, und Künstler wie Andrea Pozzo perfektionierten illusionistische Deckengemälde, die den Raum scheinbar ins Unendliche ausdehnen konnten. Später führte die Moderne zu einer bewussten Auflösung der strengen Regeln der Perspektive, wie in den Werken von Pablo Picasso oder Georges Braque, die mit kubistischen Formen experimentierten und den Raum auf neue, abstrakte Weise darstellten.

Historische Gemälde, die die perspektivische Darstellung eindrucksvoll zeigen, stammen vor allem aus der Renaissance, als Künstler begannen, die Prinzipien der Zentralperspektive systematisch anzuwenden. Hier sind einige bedeutende Werke:

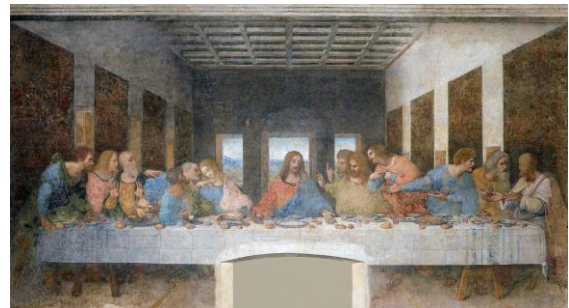
"Die Schule von Athen" (1509–1511) von Raffael: Dieses Fresko zeigt eine Gruppe von Philosophen in einer großen Halle, die durch klare Fluchtlinien und einen zentralen Fluchtpunkt dominiert wird. Der zentrale Punkt liegt auf den Figuren von Platon und Aristoteles, wodurch die Tiefenwirkung und Raumaufteilung perfekt zur Geltung kommen.



(wikipedia, abgerufen am 4. Oktober 2024)

"Das Abendmahl" (1495–1498) von Leonardo da Vinci:

In diesem Werk verwendet Leonardo eine eindrucksvolle Zentralperspektive. Alle Fluchtlinien der Architektur im Bild laufen auf den Kopf Jesu zu, der im Mittelpunkt der Komposition sitzt. Dadurch wird die Dramatik der Szene verstärkt.



(wikipedia, abgerufen am 4. Oktober 2024)

"Die Heilige Dreifaltigkeit" (1427–1428) von Masaccio: Dieses Fresko in der Kirche Santa Maria Novella in Florenz gilt als eines der ersten Werke, in denen die Zentralperspektive konsequent angewendet wurde. Masaccio schuf eine architektonische Illusion, die den Betrachter in den Raum hineinzieht.

"Die Geißelung Christi" (um 1460) von Piero della Francesca: Dieses Gemälde verwendet klare, geometrisch konstruierte Fluchtlinien, die den Raum auf dramatische Weise staffeln. Die präzise Darstellung von Architektur und Figuren im Raum macht

dieses Werk zu einem Meisterwerk der Perspektivkunst.

"Das Idealbild einer Stadt" von Fra Carnevale(um 1480): Ein Werk, das der Frührenaissance zugeschrieben wird und ein Idealbild einer Stadt zeigt. Die Perspektive wird hier auf beeindruckende Weise angewandt, um eine perfekte Symmetrie und Tiefe zu erzeugen. Es ist ein herausragendes Beispiel der damals neu entdeckten Zentralperspektive.



Schematische Darstellung des Bildes «Idealbild einer Stadt»

Diese Gemälde haben die Kunstgeschichte stark beeinflusst und zeigen die Anwendung der Perspektive in der Malerei auf höchstem Niveau.

Insgesamt betrachtet ist die geometrische Perspektive aus historischer Sicht ein Meilenstein in der Entwicklung der menschlichen Wahrnehmung und der künstlerischen Ausdrucksformen. Sie zeigt, wie eng Wissenschaft, Kunst und Philosophie miteinander verwoben sind und wie die Sichtweise auf den Raum sich über die Jahrhunderte verändert hat.

B) Geometrische Perspektive aus mathematischer Sicht

Die Perspektive spielt in der Mathematik, besonders in der Geometrie (Lehrplan 21: Form und Raum), eine zentrale Rolle. Sie beschreibt die Darstellung von Objekten in einer Weise, die ihre Lage und Grösse in einem bestimmten Raum oder aus einem bestimmten Blickwinkel widerspiegelt. Mathematisch lässt sich dies durch Projektionen und Transformationen formalisieren, die eine präzise

Beschreibung von Perspektiven ermöglichen.

Perspektive in der Geometrie

In der Geometrie wird die Perspektive häufig im Zusammenhang mit der Projektion von 3D-Objekten auf eine 2D-Ebene untersucht. Diese Projektionen spielen eine wichtige Rolle in Bereichen wie der bildlichen Darstellung, der Computergrafik oder der Architektur.

Zentralprojektion

Die Zentralprojektion, auch bekannt als perspektivische Projektion, beschreibt die Darstellung eines Objekts aus dem Blickpunkt eines Beobachters (dem Projektionszentrum) auf eine Bildebene. Dabei laufen die Strahlen von jedem Punkt des Objekts durch das Projektionszentrum, und die Schnittpunkte dieser Strahlen mit der Bildebene ergeben das projizierte Bild. Diese Art der Projektion bewirkt, dass Objekte, die weiter vom Beobachter entfernt sind, kleiner erscheinen, während näher gelegene Objekte größer erscheinen. Dies erzeugt den Eindruck von Tiefenwahrnehmung.

Mathematisch lässt sich die perspektivische Projektion mithilfe von homogenen Koordinaten und Matrizen beschreiben. Die Projektion eines Punktes $P(x,y,z)$ im dreidimensionalen Raum auf die Bildebene kann durch die Perspektivtransformation dargestellt werden, bei der Transformationen wie Drehungen und Skalierungen durch Matrizenoperationen beschrieben werden.

Parallelprojektion

Im Gegensatz zur Zentralprojektion lässt die Parallelprojektion die Größenverhältnisse unverändert, da alle Projektionsstrahlen parallel zueinander verlaufen. Hierbei bleibt die relative Grösse von Objekten unabhängig von ihrer

Entfernung zum Beobachter erhalten. Diese Projektion wird häufig in technischen Zeichnungen verwendet, da sie Maßstäblichkeit gewährleistet.

Perspektive in der Linearen Algebra

Die mathematischen Konzepte der Perspektive lassen sich durch Werkzeuge der linearen Algebra, insbesondere durch Matrizenoperationen, präzise erfassen. Matrizen repräsentieren Transformationen, die Objekte im Raum bewegen, skalieren, drehen oder verzerren. Perspektivische Projektionen können als eine spezielle Form von linearen Transformationen betrachtet werden, die zusätzlich noch nichtlineare Effekte wie Verkleinerung entfernter Objekte umfassen.

Ein Perspektivenprojektionsmatrix ermöglicht es, Punkte im 3D-Raum in einen zweidimensionalen Raum zu überführen. Dies ist grundlegend für die Darstellung von 3D-Szenen in Computergrafiken, bei denen die Simulation der realistischen Perspektive entscheidend für die visuelle Wahrnehmung ist.

Anwendungen der Perspektive

In der Mathematik ist die Theorie der Perspektive nicht nur ein abstraktes Konzept, sondern findet vielfältige Anwendungen:

- Computergrafik: Hier ist die Perspektivprojektion essenziell, um realistische 3D-Darstellungen auf zweidimensionalen Bildschirmen zu erzeugen.
- Architektur und Kunst: Künstler nutzen mathematische Methoden der Perspektive seit der Renaissance, um den Tiefeneindruck in Gemälden und Bauwerken zu erzeugen.
- Roboter- und Maschinensteuerung: Kameras und Sensoren in autonomen Systemen verwenden mathematische Modelle der Perspektive, um ihre

Umgebung zu erfassen und zu interpretieren.

Fazit

Die Perspektive aus mathematischer Sicht umfasst eine Vielzahl an Konzepten, die geometrische Transformationen und Projektionen beschreiben. Zentral dabei ist die Verwendung von linearen Algebra-Werkzeugen wie Matrizen und Koordinatentransformationen, um die Projektion von Objekten in verschiedenen Dimensionen präzise zu modellieren. Dies ermöglicht Anwendungen, die von der Kunst bis hin zur modernen Technologie reichen.

Einsatz der geometrischen Perspektive im Schulalltag mit didaktischen Hinweisen

Die geometrische Perspektive kann im Schulalltag vielfältig eingesetzt werden, um den Lernenden ein tieferes Verständnis von Raum, Geometrie und künstlerischer Gestaltung zu vermitteln. Durch die Verbindung von mathematischen und gestalterischen Aspekten können Schülerinnen und Schüler kreativ arbeiten und gleichzeitig wichtige Kompetenzen im Bereich der Mathematik und der Kunst erwerben. Anleitungen an den **Lehrplan 21**, der in der Schweiz gilt, sind dabei in verschiedenen Fachbereichen zu finden, insbesondere in den Kompetenzbereichen *Mathematik* und *Bildnerisches Gestalten*.

Fach Mathematik:

Form und Raum: Die geometrische Perspektive lässt sich ideal in den Bereich "Form und Raum" im Mathematikunterricht integrieren. Schülerinnen und Schüler lernen, Fluchtpunkte, Horizontlinien und perspektivische Verkürzung zu berechnen und anzuwenden. Sie können beispielsweise Gebäude, Straßen oder einfache geometrische Körper in der Zentral- oder Zweipunktperspektive zeichnen und dabei die mathematischen Grundlagen der Perspektive verstehen.

Koordinatensystem und Achsensymmetrie: Die Arbeit mit der Perspektive kann auch das Verständnis für Achsensymmetrie und das Koordinatensystem fördern, indem die Schüler Objekte perspektivisch zeichnen und ihre Position in einem Koordinatensystem bestimmen.

Fach: Bildnerisches Gestalten:

Darstellen und Gestalten: Die Perspektive wird traditionell im Fach "Bildnerisches Gestalten" eingesetzt, um den Schülerinnen und Schülern beizubringen, wie sie räumliche Tiefe in ihren Zeichnungen darstellen können. Hier können die Grundlagen der Einpunkt-, Zweipunkt- und Dreipunktperspektive vermittelt werden. Es werden künstlerische Arbeiten erstellt, die die Prinzipien der Perspektive anwenden, wie z. B. die Zeichnung von Gebäuden, Innenräumen oder Landschaften.

Bezug zur Kunstgeschichte: Historische und künstlerische Aspekte der Perspektive, wie deren Entwicklung in der Renaissance, können in den Unterricht integriert werden, um die Bedeutung der geometrischen Perspektive für die Kunstgeschichte zu verdeutlichen.

Interdisziplinäre Projekte:

Mathematik und Kunst verbinden: Ein fächerübergreifendes Projekt könnte den Schülerinnen und Schülern ermöglichen, ihre Kenntnisse in Mathematik und Kunst zu kombinieren. Sie könnten beispielsweise Modelle von Gebäuden oder fiktiven Stadtlandschaften entwerfen und diese perspektivisch korrekt darstellen. Dies fördert das räumliche Vorstellungsvermögen und die kreative Problemlösung.

Technologie und Medien: Moderne digitale Tools wie 3D-Zeichensoftware oder CAD-Programme lassen sich nutzen, um den Schülerinnen und Schülern die Perspektive digital zu veranschaulichen. Dies könnte ein weiterer spannender Anwen-

dungsbereich sein, der sowohl im mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch im künstlerisch-gestalterischen Bereich verankert ist.

Anlehnung an den Lehrplan 21

Der **Lehrplan 21** legt besonderen Wert auf die Förderung von Kompetenzen in verschiedenen Bereichen. Die geometrische Perspektive lässt sich in folgende Kompetenzbereiche einordnen:

Mathematik: Form und Raum

Kompetenz: "Die Schülerinnen und Schüler beschreiben und vergleichen ebene und räumliche Figuren und bauen solche nach." Hier bietet die geometrische Perspektive einen idealen Zugang, um die Fähigkeit zur Beschreibung und zum Nachbau von dreidimensionalen Objekten zu fördern.

Bildnerisches Gestalten: Darstellen und Gestalten:

Kompetenz: "Die Schülerinnen und Schüler gestalten ihre visuellen und gestalterischen Vorstellungen in verschiedenen Techniken und Ausdrucksformen."

Die geometrische Perspektive unterstützt die Fähigkeit, Vorstellungen von Raum und Tiefe in gestalterische Arbeiten umzusetzen.

Überfachliche Kompetenzen:

Kreativität und Problemlösung: Durch das Arbeiten mit der Perspektive werden die Schülerinnen und Schüler dazu angeregt, kreative Lösungen für räumliche Darstellungen zu finden. Dies fördert ihre Problemlösefähigkeiten und ihr räumliches Denken.

Hier sechs Bildideen, welche perspektivisches Zeichnen ermöglichen:

Hier sind fünf Bildideen, die das perspektivische Zeichnen optimal veranschaulichen:

1. Stadtansicht mit Fluchtpunkten: Eine Zeichnung einer Straße in einer Stadt, bei der Gebäude entlang der Straße zu einem oder zwei Fluchtpunkten im Horizont zusammenlaufen. Dies zeigt die klassische *Zentralperspektive* (Ein-

Punkt-Perspektive) oder *Zwei-Punkt-Perspektive*.



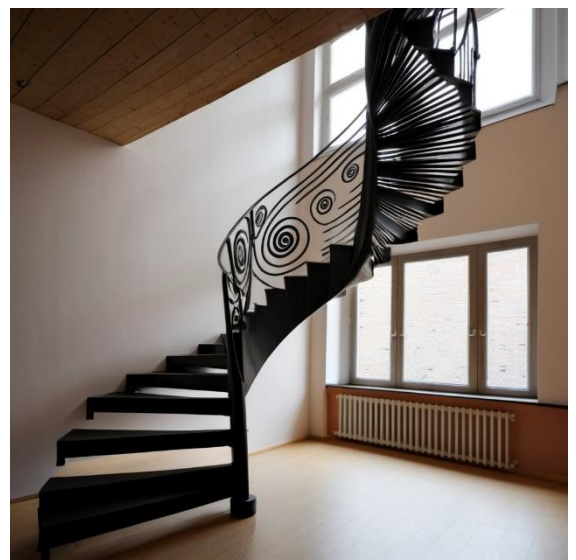
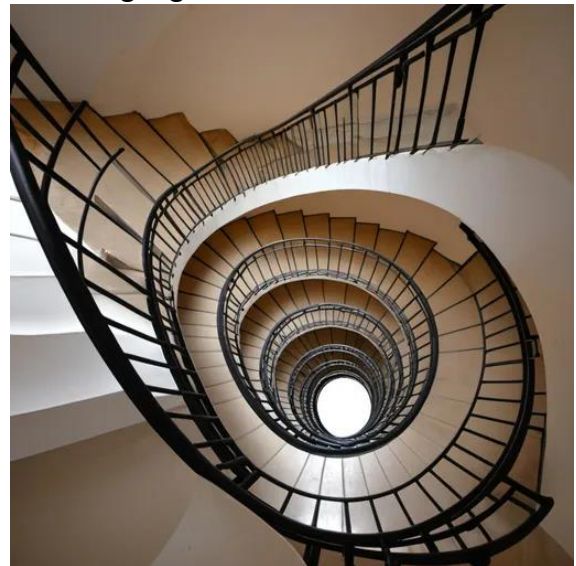
2. Bahngleise in die Ferne: Ein Bild von Bahngleisen, die sich in der Ferne zu einem Punkt verjüngen, illustriert die *Verjüngung* und das *Verlaufsprinzip* der Perspektive, bei der parallele Linien sich scheinbar am Horizont treffen.



3. Brücke von unten gesehen: Eine Brücke, die von einem tieferen Blickwinkel aus dargestellt wird, um die *Froschperspektive* zu zeigen, bei der der Betrachter nach oben schaut und die Objekte größer erscheinen, je näher sie am Betrachter sind.
4. Innenraum einer Kirche: Eine Zeichnung eines langen Kirchenschiffs, bei der Säulen und Bögen in Richtung eines zentralen

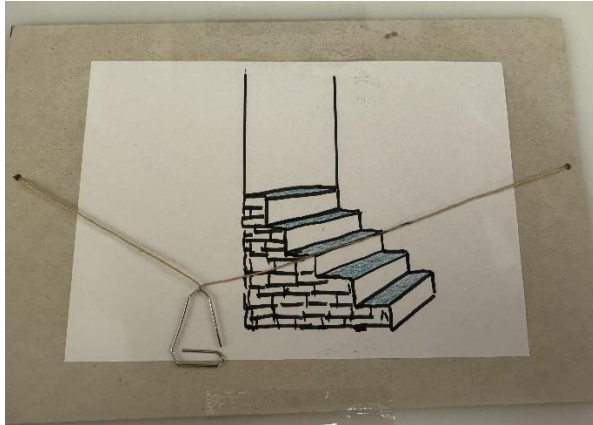
len Fluchtpunkts führen, veranschaulicht den Gebrauch der Perspektive in der Architektur, speziell der *Zentralperspektive*.

5. Treppenhaus im Spiralmuster: Ein Bild eines spiralförmigen Treppenhauses von oben oder unten betrachtet zeigt die *Raumtiefenwirkung* und das Spiel von *Perspektivlinien*, die sich immer wieder neu orientieren, um Dynamik und Bewegung darzustellen.



6. Zeichenschablone
Eine einfache Möglichkeit bietet die nachfolgende Umsetzung. Auf einem A4 Karton sind durch zwei Öffnungen auf gleicher Höhe ein fester

Faden angebracht. Alle «waagrechten» Linien werden durch den Faden festgelegt, alle senkrechten Linien bleiben senkrecht. Mit Hilfe einer geöffneten Büroklammer wird jeweils die Position gesucht.



Fazit

Die geometrische Perspektive bietet vielfältige Möglichkeiten, den Unterricht kreativ zu gestalten und gleichzeitig wichtige Kompetenzen in Mathematik und Kunst zu fördern. Der **Lehrplan 21** bietet durch die Kompetenzbereiche "Raum und Form" sowie "Darstellen und Gestalten" eine gute Grundlage, um die Perspektive sowohl im mathematischen als auch im Unterricht Bildnerisches Gestalten sinnvoll zu integrieren. Interdisziplinäre Projekte könnten das Verständnis vertiefen und den Schülerinnen und Schülern zeigen, wie eng Mathematik und Kunst miteinander verbunden sind.

Literaturhinweise

Hier ist eine Auswahl von deutschsprachiger Literatur zur geometrischen Perspektive, die sowohl kunsthistorische als auch mathematische und didaktische Aspekte abdeckt:

Kunsthistorische und theoretische Grundlagen

- **Erwin Panofsky:** *Die Perspektive als "symbolische Form"*. Suhrkamp, 1991. Panofsky untersucht die kulturellen und

philosophischen Dimensionen der Perspektive, insbesondere in der Renaissancekunst.

- **Hans Belting:** *Florenz und Bagdad: Eine westöstliche Geschichte des Blicks*. C.H. Beck, 2008. Belting behandelt die Entwicklung der Perspektive und deren Einfluss auf die westliche und östliche Bildkultur.
- **Hanno Ehses, Egon Verheyen (Hrsg.):** *Die Perspektive in der Kunst der Renaissance*. DuMont, 1978. Eine umfassende Sammlung von Aufsätzen zur Entwicklung der Perspektive in der Kunst der Renaissance.

2. Mathematische Aspekte der Perspektive

Kristin Asdal, Friedrich Wörner: *Geometrie und Perspektive: Eine Einführung für Lehrende und Lernende*. Springer Spektrum, 2013.

Dieses Buch bietet einen umfassenden Einstieg in die geometrischen Grundlagen der Perspektive und ist für den Unterricht geeignet.

Günter L. Mattenklott: *Perspektive: Eine Darstellung der mathematischen Grundlagen*. Vieweg+Teubner, 2002. Eine mathematische Einführung in die Perspektive, insbesondere die Projektion und Transformation im Raum.

Didaktische und schulische Anwendung

Wolfgang Wagensonner: *Perspektive lehren und lernen: Geometrie und Kunst im Unterricht verbinden*. Klett Verlag, 2011. Ein praxisorientiertes Buch, das Ansätze für die Vermittlung der geometrischen Perspektive im Schulalltag bietet.

Friedhelm Meyer auf der Heide: *Mathematik und Kunst: Geometrie in der Kunstgeschichte*. Westermann, 2010. Dieses Werk beleuchtet die Verbindung von mathematischen Konzepten und Kunstgeschichte, insbesondere die Rolle der Perspektive.

Walter Burkardt, Eckart Heinze (Hrsg.): *Mathematikunterricht heute: Raum und*

Perspektive. Beltz Verlag, 2004. Eine Sammlung von Unterrichtsbeispielen zur räumlichen Wahrnehmung und Perspektive im Mathematikunterricht.

Fachübergreifende und interdisziplinäre Werke

Franziska Weiser, Martin Dürst (Hrsg.): *Perspektivenwechsel: Kunst, Architektur und Geometrie im Dialog.* Springer, 2015. Ein interdisziplinäres Werk, das die Perspektive aus kunsthistorischer, architektonischer und geometrischer Sicht beleuchtet.

Andreas Körber: *Raum und Perspektive: Fächerübergreifendes Lernen in Mathematik und Kunst.* Cornelsen, 2012. Ein praktisches Handbuch zur interdisziplinären Vermittlung der Perspektive im Schulalltag.

Diese Literatur bietet umfassende Einblicke in die verschiedenen Aspekte der geometrischen Perspektive, sowohl für kunsthistorisch Interessierte als auch für Mathematik- und Kunstlehrkräfte.

